УДК: 517.518

# ПРИМЕНЕНИЕ СОГЛАСОВАННЫХ И АНТИСОГЛАСОВАННЫХ ФУНКЦИЙ К ПОИСКУ ГЛОБАЛЬНЫХ ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИЙ ИЗ ПОКАЗАТЕЛЬНОГО КЛАССА ТАКАГИ

Галкин О. Е., Галкина С. Ю.

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики
(Россия, Нижний Новгород)

E-mail: olegegalkin@ya.ru; svetlana.u.galkina@mail.ru

Функции из показательного класса Такаги имеют один вещественный параметр $v \in (-1;1)$ и в точках $x \in \mathbb{R}$ задаются рядом $T_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v^n T_0(2^n x)$, где $T_0(x)$ — расстояние между $x$ и ближайшей к ней целой точкой. При $v = 1/2$ функция $T_v$ совпадает с функцией Такаги. При различных $v \in (-1;1)$ изучены глобальные экстремумы функций $T_v$, а также множества, на которых они достигаются. Это исследование опирается на свойства согласованных и антисогласованных многочленов и рядов, которым посвящена первая часть работы.

*Ключевые слова:* непрерывная нигде не дифференцируемая функция Такаги; глобальные экстремумы функций показательного класса Такаги; многочлены и ряды, согласованные с действительными числами.

# APPLYING CONSISTENT AND ANTI-CONSISTENT FUNCTIONS TO THE SEARCH FOR GLOBAL EXTREMA OF FUNCTIONS FROM THE EXPONENTIAL TAKAGI CLASS

Galkin Oleg, Galkina Svetlana

National research University Higher school of Economics (Russia, Nizhny Novgorod)

Functions of the exponential Takagi class have one real parameter $v \in (-1;1)$ and at points $x \in \mathbb{R}$ are set by the series $T_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v^n T_0(2^n x)$, where $T_0(x)$ is the distance between $x$ and the nearest integer point. For $v = 1/2$, the function $T_v$ is the same as the Takagi function. For different $v \in (-1;1)$, the global extrema of functions $T_v$ are studied, as well as the sets on which they are reached. This research is based on the properties of consistent and anti-consistent polynomials and series, to which the first part of the paper is devoted.

*Keywords:* Takagi's continuous nowhere differentiable function; global extrema of functions of the exponential Takagi class; polynomials and series consistent with real numbers

Полное изложение представленных здесь результатов можно найти в [1]. Эти результаты были получены независимо от результатов работы [2] и работ, на которые она ссылается. Всюду непрерывная, но нигде не дифференцируемая функция Такаги на $\mathbb{R}$ впервые была описана в статье [3].

## 1. Унитарные многочлены и ряды, согласованные и антисогласованные с числами

**Определение 1.** *Многочлен* $c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n$ или *степенной ряд* $c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots$ называется *унитарным*, если свободный член $c_0$ равен 1, а остальные коэффициенты равны 1 или $-1$.

**Определение 2.** Пусть $w \in \mathbb{R}$. Тогда

1) унитарный *многочлен* $P_w(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n$ называется *согласованным с точкой* $w$, а точка $w$ — согласованной с этим многочленом, если $P_w(w) = 0$ и для любых $k = 1, \ldots, n$ выполнены неравенства

$$c_k \cdot (c_0 + c_1w + \ldots + c_{k-1}w^{k-1}) < 0. \tag{1}$$

*Присоединенными* (к согласованным с точкой $w$ многочленам) *рядами* будем называть два унитарных ряда $F_w^+(x)$ и $F_w^-(x)$:

$$\begin{aligned} F_w^+(x) &= c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n + c_0x^{n+1} + c_1x^{n+2} + \ldots + c_nx^{2n+1} + \ldots = \\ &= P(x)(1 + x^{n+1} + x^{2(n+1)} + \ldots), \\ F_w^-(x) &= c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n - c_0x^{n+1} - c_1x^{n+2} - \ldots - c_nx^{2n+1} - \ldots = \\ &= P(x)(1 - x^{n+1} - x^{2(n+1)} - \ldots). \end{aligned}$$

*Промежуточными рядами для точки* $w$ будем называть все унитарные ряды (включая присоединенные), имеющие вид

$$\begin{aligned} &(c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n) \pm (c_0x^{n+1} + c_1x^{n+2} + \ldots + c_nx^{2n+1}) \pm \ldots = \\ &= P(x)(1 \pm x^{n+1} \pm x^{2(n+1)} \pm \ldots), \end{aligned}$$

где допускаются любые комбинации знаков «+» и «−».

2) Унитарный *ряд* $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$ называется *согласованным с точкой* $w$, а *точка* $w$ — *согласованной с этим рядом*, если неравенства (1) выполнены для любых $k \in \mathbb{N}$. *Присоединенные (к согласованному ряду) и промежуточные ряды для точки* $w$ в этом случае полагаем равными согласованному ряду.

3) *Функцией, согласованной с точкой* $w$, называется многочлен или ряд, согласованный с этой точкой.

**Определение 3.** Пусть $w \in \mathbb{R}$. Тогда

1) унитарный *многочлен* $Q(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$ называется *антисогласованным с точкой* $w$, а точка $w$ — антисогласованной с этим многочленом, если $Q(w) = 0$ и для любых $k = 1, \dots, n$ выполнены неравенства

$$c_k \cdot (c_0 + c_1 w + \dots + c_{k-1} w^{k-1}) > 0. \tag{2}$$

2) Унитарный *ряд* $A(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$ называется *антисогласованным с точкой* $w$, а точка $w$ — антисогласованной с этим рядом, если неравенства (2) выполнены для любых $k \in \mathbb{N}$.

## 2. Связь согласованных и антисогласованных функций с глобальными экстремумами

**Теорема.** *Пусть* $v \in (-1; 1)$ *и* $E_v$ *есть множество точек глобального максимума (соответственно, минимума) функции* $T_v$ *на отрезке* $[0; 1]$. *Тогда верны следующие утверждения:*

*1) Если с точкой* $2v$ *согласован (соответственно, антисогласован) ряд* $F_{2v}(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n + \dots$, *то*

*1а) множество* $E_v$ *содержит только две (возможно, совпадающих) точки:* $x^-(v) \in [0; 1/2]$ *и* $x^+(v) \in [1/2; 1]$. *Первая точка и ее двоичное разложение имеют вид:*

$$x^-(v) = 1/2 - F_{2v}(1/2)/4 = 0{,}x_1^- x_2^- \dots,$$

*где*

$$x_n^- = (1 - c_{n-1})/2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Вторая точка и ее двоичное разложение имеют вид:*

$$x^+(v) = 1 - x^-(v) = 1/2 + F_{2v}(1/2)/4 = 0{,}x_1^+ x_2^+ \dots,$$

*где*

$$x_n^+ = 1 - x_n^- = (1 + c_{n-1})/2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

*1б) Глобальный максимум (соответственно, минимум) функции* $T_v$ *можно вычислить по формулам*

$$T_v(x^{\pm}(v)) = \frac{1}{2(1-v)} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (2v)^n \sum_{p=n}^{\infty} \frac{c_p}{2^p}$$

*и*

$$T_v(x^{\pm}(v)) = \frac{1}{2(1-v)} - \frac{1}{4\pi i} \int\limits_{|z|=r} \frac{F_{2v}(z) F_{2v}(v/z)}{2z - 1} dz,$$

*где* $r$ *— любое число из интервала* $(\max(1/2, v), 1)$.

*2) Если с* $2v$ *согласован (соответственно, антисогласован) многочлен* $P_{2v,N}(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^N$, *и* $F_{2v}^{\pm}$ *— присоединенные ряды, то:*

*2а) множество* $E_{v,N}$ *точек глобального максимума (соответственно, минимума) функции* $S_{v,N}(x) = \sum_{n=0}^{N} v^n T_0(2^n x)$ *на отрезке* $[0; 1]$ *имеет вид* $E_{v,N} = [a_N, b_N] \cup [1 - b_N, 1 - a_N]$, *где*

$$a_N(v) = 1/2 - P_{2v,N}(1/2)/4 - 1/2^{N+2}, \quad b_N(v) = a_N(v) + 1/2^{N+1}.$$

*При этом двоичные разложения обеих точек* $a_N(v)$ *и* $1 - a_N(v)$ *конечны:* $a_N(v) = 0{,}x_1^- x_2^- \dots x_{N+1}^-$, $1 - a_N(v) = 0{,}x_1^+ x_2^+ \dots x_{N+1}^+$, *где*

$$x_n^- = (1 - c_{n-1})/2, \quad x_n^+ = 1 - x_n^- = (1 + c_{n-1})/2, \quad n = 1, \dots, N+1.$$

*Глобальный максимум (соответственно, минимум)* $M_{v,N}$ *функции* $S_{v,N}$ *на отрезке* $[0; 1]$ *может быть вычислен по формулам*

$$M_{v,N} = \frac{1 - v^{N+1}}{2(1-v)} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{N} c_n \cdot (2v)^n \sum_{i=n}^{N} c_i / 2^i$$

*и*

$$M_{v,N} = \frac{1-v^{N+1}}{2(1-v)} - \frac{1}{4\pi i} \int\limits_{|z|=r} \frac{P_{v,N}(z)P_{v,N}(v/z)}{2z-1} dz,$$

*где $r$ — любое число из множества $(0;1/2)\cup(1/2;1)$.*

*2б) В случае $v^{N+1}>0$ (то есть $v>0$ или $N$ нечетно) множество $E_v$ имеет хаусдорфову размерность $1/(N+1)$ и состоит из всех точек $x$ с двоичным разложением вида*

$$x = 0,\left[\begin{array}{l} x_1^- x_2^- \dots x_{N+1}^- \\ x_1^+ x_2^+ \dots x_{N+1}^+ \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x_1^- x_2^- \dots x_{N+1}^- \\ x_1^+ x_2^+ \dots x_{N+1}^+ \end{array}\right. \dots .$$

*Любую точку $x$ множества $E_v$ можно записать также в форме*

$$x = 1/2 \pm F(1/2)/4, \tag{3}$$

*где $F$ — некоторый промежуточный ряд для числа $2v$, и наоборот, любая точка вида (3) принадлежит $E_v$. Кроме того,*

$$\begin{aligned} \inf E_v &= 0{,}x_1^- \dots x_{N+1}^- x_1^- \dots x_{N+1}^- \dots = \\ &= 1/2 - P_{2v,N}(1/2)/(4-1/2^{N-1}) = 1/2 - F_{2v}^+(1/2)/4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sup(E_v \cap [0;1/2]) &= 0{,}x_1^- \dots x_{N+1}^- x_1^+ \dots x_{N+1}^+ x_1^+ \dots x_{N+1}^+ \dots = \\ = 1/2 - P_{2v,N}&(1/2)\cdot(1-1/2^N)/(4-1/2^{N-1}) = 1/2 - F_{2v}^-(1/2)/4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sup E_v &= 1 - \inf E_v = 0{,}x_1^+ \dots x_{N+1}^+ x_1^+ \dots x_{N+1}^+ \dots = \\ &= 1/2 + P_{2v,N}(1/2)/(4-1/2^{N-1}) = 1/2 + F_{2v}^+(1/2)/4. \end{aligned}$$

*Глобальный максимум (соответственно, минимум) $M_v$ функции $T_v$ на отрезке $[0;1]$ в этом случае можно вычислить по формуле*

$$M_v = \frac{M_{v,N}}{1-v^{N+1}}.$$

*2в) В случае $v^{N+1}<0$ (то есть $v<0$ и $N$ четно) множество $E_v$ состоит из всех точек $x$ вида*

$$x = 1/2 \pm (P_{2v,N}(1/2)/4 + 1/2^{N+2} - y/2^{N+1}),$$

*где $y$ — любая точка глобального минимума (соответственно, максимума) функции $T_v$ на отрезке $[0;1]$.*

*Глобальный максимум (соответственно, минимум) $M_v$ функции $T_v$ на отрезке $[0;1]$ в этом случае можно вычислить по формуле*

$$M_v = M_{v,N} + v^{N+1} m_v,$$

*где $m_v = \min_{y\in[0,1]} T_v(y)$ (соответственно, $m_v = \max_{y\in[0,1]} T_v(y)$).*

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений Национального исследовательского университета Высшая школа экономики, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931.

## Список литературы

[1] Galkin O. Functions consistent with real numbers, and global extrema of functions in exponential Takagi class. / O. Galkin, S. Galkina // arXiv:2003.08540v1 [math.CA] – 2020.

[2] Han X. On the Extrema of Functions in the Takagi Class. / X. Han // A thesis presented to the University of Waterloo in fulfillment of the thesis requirement for the degree of Master of Mathematics in Actuarial Science. – Waterloo, Ontario, Canada, 2019.

[3] Takagi T. A simple example of a continuous function without derivative. / T. Takagi // Tokyo Sugaku-Butsurigakkwai Hokoku. – 1901. – V. 1. – P. 176–177.